Conceptes bàsics de treball, energia, impuls i quantitat de moviment

Sant Ignasi-Sarrià

21 de març de 2004

En aquests fulls us indiquem els conceptes fonamentals que caldrà conèixer per entendre els problemes que tracten sobre impuls, quantitat de moviment, treball i energia. Al llibre teniu una explicació més detallada que podeu llegir, però aquí us presentem les fòrmules fonamentals així com els conceptes més essencials.

I. El Treball i la potència

La paraula 'treball' té moltes acepcions en el llenguatge quotidià. En física té un significat més específic. En efecte, el treball que fa una força $\vec{F}$ sobre un cos en un desplaçament Δx es defineix com:

$$W = F_x \cdot \Delta x$$

on F_x és el component en la direcció X (la direcció del desplaçament[1]) de la força. Es pot escriure també que

$$\boxed{W = F \cdot \cos\theta \cdot \Delta x,}$$

on θ és l'angle entre la força $\vec{F}$ i l'eix X.[2]

[1] Observeu que hem escollit l'eix X en la direcció del desplaçament.

[2] Si el cos que es mou no ho fa en línia recta sinó en una trajectòria curva, de manera que en desplaçar-se canvia l'angle θ, el treball serà la suma dels treballs en cada un dels intèrvals rectes en que suposadament podrem dividir la trajectòria. Quan 'sigueu més grans' veureu que això es pot fer en general mitjançant el concepte d'*integral*.

NOTES: a) La unitat de treball és el joule, que es defineix com

$$1J = 1N \cdot 1m.$$

b) Observeu que el treball pot ser positiu, nul o negatiu[3]:

$$\begin{array}{lcl} 0 \le \theta < 90^o & \Rightarrow & W > 0 \\ \theta = 90^o & \Rightarrow & W = 0 \\ 90^o < \theta \le 180^o & \Rightarrow & W < 0 \end{array}$$

c) Observeu també que es pot escriure el treball com un *producte escalar* de dos vectors:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

on $\vec{r}$ és el vector posició del cos que es mou.

d) El treball que fan una sèrie de forces que actuen sobre un cos és la suma dels treballs que fan totes les forces, i resulta ser, simplement, *el treball de la resultant de totes les forces.*

e) El treball que fa la força *pes* és, evidentment,

$$W = -m \cdot g \cdot \Delta h$$

on h és l'alçada del cos en qüestió[4]. Així, en baixar una escala, per exemple, el pes no fa cap força en els desplaçaments horitzontals; només importa la diferència d'alçada entre les posicions finial i inicial.

f) El treball que fa una força elàstica (que segueix la *llei de Hooke* $F = k \cdot x$, com per exemple una molla de constant elàstica k) és:

$$W = -\frac{1}{2}kx^2$$

on x representa la longitud que s'ha comprimit la molla.

g) Definim Potència com el treball fet per unitat de temps. La potència mitja en un intèrval de temps Δt serà, per tant,

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}.$$

[3] El significat físic d'aquest signe el veurem més avall quan relacionem el treball amb l'energia.

[4] El signe $-$ ve de que quan el cos puja, el pes fa un treball negatiu, i quan el cos baixa el pes fa un treball positiu.

Observeu també com, amb unes petites operacions, veiem que podem escriure que

$$P_m = F_x \cdot v_m$$

on F_x és el component x de la força i v_m és la velocitat mitjana $\Delta x/\Delta t$ en la direcció x.

La unitat de potència s'anomena watt, i es defineix com $1W = 1J/s$.

II. Treball i energia

a. Teorema de les forces vives

Fent unes quantes operacions, podem demostrar el que anomenem Teorema de les forces vives, que diu que:

$$\boxed{W = E_{c,f} - E_{c,i}}$$

on

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

és l'*energia cinètica* del cos (una mesura de l'energia que té un cos degut a la seva velocitat). $E_{c,f}$ serà l'energia cinètica final i $E_{c,i}$ serà l'energia cinètica inicial del cos.

La interpretació física d'aquest teorema de les forces vives és que *el treball que fa la força resultant sobre un objecte és igual a la variació d'energia cinètica de l'objecte.*

Notes: a) El *teorema de les forces vives* ens proporciona una relació entre l'energia i el treball que ens permet entendre millor el significat físic d'energia. En efecte, així com hem vist que un treball produeix un canvi en l'energia cinètica d'un cos, també podem veure les coses al revés: un cos que té una determinada energia cinètica té *la capacitat de produïr un treball W mitjançant la seva frenada*[5]. En general (ampliant el que diem aquí) podrem dir que, en física, *energia és la capacitat que té un cos de fer un treball.* Podeu pensar una mica si és així.

b) Observeu que si el treball és positiu, indica que la força provoca un augment de l'energia cinètica; si és negatiu, provoca una disminució de l'energia cinètica.

b. L'energia potencial gravitatòria

Suposem que llancem una pilota verticalment cap amunt. A mesura que puja, la seva energia cinètica va disminuint perquè el treball que fa el pes és negatiu (pensa per què). Quan la pilota torna a baixar, recupera velocitat (i energia cinètica) perquè el pes fa ara un treball positiu. Quan arriba a baix, ha recuperat tota l'energia cinètica que tenia en el moment de ser llançada.

Aquest fet es pot comprendre si considerem un nou tipus d'energia: l'energia potencial. Aquesta energia potencial podem suposar que només depén de l'alçada del cos, i la podem definir com:

$$\boxed{E_p = m \cdot g \cdot h}$$

on h és l'alçada del cos.

Observem que, amb aquesta definició d'energia potencial, podem fer unes petites operacions per obtenir un resultat important:

a) En primer lloc, observem que el treball que fa el pes en pujar el cos des d'h_1 fins h_2 és precisament el canvi d'energia potencial, canviat de signe. En efecte,

$$W_{1\to 2} = -mg(h_2 - h_1),$$

mentre que

$$E_{p,2} - E_{p,1} = mg(h_2 - h_1).$$

Per tant, tindrem que:

$$W_{1\to 2} = -(E_{p,2} - E_{p,1}) \tag{1}$$

[5] Penseu per exemple com, per frenar un cotxe, cal que actuin els frens fent un treball que els escalfa (per això és perillós baixar un port de muntanya en cotxe utilitzant excessivament els frens). També veiem com, en un accident, l'energia cinètica del cotxe es transforma en un treball que fa una força que és capaç de deformar l'estructura del cotxe.

b) En segon lloc, recordem que el treball que fa el pes és igual a la variació d'energia cinètica:

$$W_{1\to 2} = E_{c,2} - E_{c,1}. \tag{2}$$

c) Per tant, podrem escriure a partir de (1) i (2) que:

$$-E_{p,2} - E_{p,1} = E_{c,2} - E_{c,1},$$

d'on resulta una cosa important:

$$\boxed{E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}.} \tag{3}$$

Si entenem l'energia del cos com $E = E_c + E_p$, veiem que *en el moviment del cos es conserva la seva energia (la suma de les seves energia cinètica i potencial)*. A $E = E_c + E_p$ l'anomenem energia mecànica.

Físicament el que ens mostra això és que, en la pujada del cos, inicialment la seva energia era només cinètica[6], i que a mesura que puja, l'energia cinètica va disminuint, mentre que va augmentant la seva energia potencial. En el punt més elevat, tota l'energia del cos és energia potencial. I, al contrari, si deixem caure un cos des d'una certa alçada, la seva energia potencial que té en el punt inicial es va convertint en energia cinètica a mesura que baixa.

Això és útil per fer molts càlculs, ja que, per exemple, coneixent la velocitat inicial i la posició inicial del cos, podem saber la seva energia mecànica inicial ($E_{c,i}+E_{p,i}$). Així podrem trobar fàcilment la seva velocitat a una determinada alçada, aplicant la conservació de l'energia mecànica.

NOTA: aquesta conservació de l'energia mecànica (cinètica + potencial) només es verifica si no hi ha forces de fregament. Les forces de fregament fan un treball negatiu que dissipa energia en forma de calor, i fan que no es conservi l'energia mecànica. L'equació que ens 'fallarà' en aquest cas és l'equació (1).

Podem parlar d'energia potencial quan les forces que actuen són del tipus que anomenem *forces conservatives* (com és per exemple el pes).

Les forces no conservatives (també anomenades forces dissipatives) fan un treball *que és precisament igual a la variació d'energia mecànica* del cos que es mou. Tindrem, en presència de forces dissipatives, que aquestes fan un treball W_{nc} que val:

$$W_{nc} = E_f - E_i$$

on E_f és l'energia mecànica inicial ($E_f = E_{c,f} + E_{p,f}$) i E_i és l'energia mecànica inicial.

[6] Si parteix de $h = 0$.

III. Quantitat de moviment i impuls

Definicions:

i) La quantitat de moviment $\vec{p}$ o moment lineal d'un objecte de massa m que es mou amb una velocitat v és:

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}.}$$

La seva unitat és kg· m/s. Com veiem, la quantitat de moviment és una magnitud vectorial.

ii) L'impuls d'una força sobre un objecte és:

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t.}$$

La seva unitat és N·s.

El concepte d'impuls és especialment útil per forces intenses que actuen en un interval de temps petit, com xuts, cops secs, dispars... són les anomenades 'forces impulsives'.

Si suposem que la força que actua per exemple en un xut d'una pilota és aproximadament constant durant el contacte del peu amb la pilota, podem trobar aquesta *força mitjana* mitjançant $\vec{I} = \vec{F}_m \cdot \Delta t$.

Relació entre quantitat de moviment i impuls

Per trobar l'impuls, normalment no partim de la força aplicada, perquè és molt difícil de conèixer-la en el cas de forces impulsives. El que fem és utilitzar la relació entre quantitat de moviment i impuls.

Anem ara a trobar aquesta relació:

Considerem una partícula de massa m que en un instant determinat es mou a una velocitat $\vec{v}_1$ Si sobre aquesta partícula actua una força mitjana F_m durant un interval de temps Δt, la seva velocitat canviarà a $\vec{v}_2$. L'acceleració mitjana que haurà actuat serà

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}.$$

Si substituïm això a $\vec{F}_m = m \cdot \vec{a}_m$ (segona llei de Newton), tindrem:

$$\vec{F}_m = m \cdot \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}.$$

Si passem Δt a l'altre costat, tindrem que

$$\vec{F}_m \cdot \Delta t = m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Observem que el primer membre és igual a l'impuls de la força $\vec{F}_m$, mentre que el segon membre és igual a la variació de la quantitat de moviment durant l'interval de temps en que ha actuat la força. Per tant, podrem escriure:

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p},} \tag{4}$$

que més desenvolupadament es pot escriure com:

$$\vec{F}_m \cdot \Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1.$$

En paraules, això vol dir que *l'impuls de la força resultant que actua sobre una partícula és igual a la variació de la quantitat de moviment que té lloc durant el temps d'actuació d'aquesta força.*

Això és útil per trobar la força mitjana que actua per exemple en un dispar o un xut, i també, com veurem ara, per estudiar les col·lisions entre partícules.

a. Interacció entre dues partícules

Sabem que quan dues partícules 1 i 2 interactuen, la força $\vec{F}_{12}$ que fa la partícula 1 sobre la 2 és igual i oposada a $\vec{F}_{21}$:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Si multipliquem els dos membres per l'interval de temps que dura la interacció, tindrem:

$$\vec{F}_{12}\Delta t = -\vec{F}_{21}\Delta t,$$

de manera que tenim que l'impuls que rep la partícula 2 de la partícula 1 és igual, i canviat de signe, a l'impuls que rep la partícula 1 de la partícula 2:

$$\vec{I}_2 = -\vec{I}_1.$$

Si substituïm $\vec{I}_2$ i $\vec{I}_1$ per les corresponents variacions de les quantitats de moviment [recordar l'equació (4)], tindrem:

$$\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$$

on $\Delta\vec{p}_1$ representa la variació de la quantitat de moviment de la partícula 1, i similarment passa amb la 2.

Si passem $\Delta\vec{p}_1$ al primer membre, tindrem que

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0,$$

és a dir:

$$\vec{p}_{1,f} - \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,f} - \vec{p}_{1,i} = 0$$

d'on resulta, reordenant els sumands,

$$\vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} - \vec{p}_{1,i} - \vec{p}_{2,i} = 0,$$

és a dir:

$$(\vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}) - (\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i}) = 0,$$

que escrit de manera més compacta resulta ser:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = 0$$

on $\vec{p}_f$ és la quantitat de moviment total (de les partícules 1 i 2) final, i $\vec{p}_i$ és la quantitat de moviment total inicial.

Per tant, en la interacció entre dues partícules, es té que

$$\boxed{\Delta\vec{p} = 0}$$

on $\vec{p}$ és la quantitat de moviment total de les dues partícules ($\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$). Dit en paraules, *la quantitat de moviment del sistema de dues partícules no varia per la interacció d'aquestes.*

Això és particularment útil en l'estudi de les col·lisions. En efecte, *en una col·lisió es conserva la quantitat de moviment.* També és útil en els problemes d'estudi del retrocés d'un canó o una escopeta quan fa un dispar.

Nota: la conservació de la quantitat de moviment d'un sistema amb forces internes es verifica també quan hi ha més de dues partícules.

b. Col·lisions

En tota col·lisió, pel que acabem de veure, es conserva la quantitat de moviment del sistema. Però, atenent a la conservació o no de l'energia cinètica, observem que hi ha dos tipus principals de col·lisions: les col·lisions elàstiques i les col·lisions inelàstiques.

1.- Col·lisions elàstiques en una dimensió

Les col·lisions elàstiques són aquelles en les que *es conserva l'energia cinètica total.* És el cas de les col·lisions en les que no es produeixen deformacions ni escalfaments en els cossos que col·lisionen. El cas típic és el de les boles de billar.

En l'estudi de les col·lisions elàstiques en una dimensió es planteja un sistema de dues equacions (les que venen a partir de la *conservació de la quantitat de moviment* i la *conservació de l'energia cinètica.*

Si tenim dues masses m_1 i m_2 que tenen inicialment les velocitats $v_{1,i}$ i $v_{2,i}$, podem trobar les velocitats finals a partir de les següents equacions:

$$\left.\begin{array}{r} m_1 \cdot v_{1,i} + m_2 \cdot v_{2,i} = m_1 \cdot v_{1,f} + m_2 \cdot v_{2,f} \\ \frac{1}{2}m_1 \cdot v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_{2,f}^2 \end{array}\right\}$$

Això resulta ser un sistema d'equacions que cal resoldre per trobar $v_{1,f}$ i $v_{2,f}$.

2.- Col·lisions inelàstiques en una dimensió

Les col·lisions inelàstiques són aquelles en les que es tenen pèrdues d'energia cinètica del sistema per deformacions dels cossos que xoquen o perquè hi ha alguna força dissipativa (com per exemple quan un projectil queda dins un bloc de fusta: en aquest cas el projectil es frena per una força de fregament amb la fusta, que dissipa calor).

Considerarem només el cas extrem de les *col·lisions completament inelàstiques*, que són aquelles en les que els dos cossos després de la col·lisió queden enganxats.

En aquest cas tindrem només una equació per aplicar (la que prové de la conservació de la quantitat de moviment), però degut a que considerem el cas d'una col·lisió completament inelàstica, tindrem només una incògnita: la velocitat dels dos cossos units, v_f.

L'equació a resoldre serà:

$$m_1 \cdot v_{1,i} + m_2 \cdot v_{2,i} = (m_1 + m_2) \cdot v_f .$$

Aquesta equació prové de la conservació de la quantitat de moviment del sistema i de que al final tenim un únic cos en moviment, de massa $m_1 + m_2$.

Aquesta equació es pot resoldre bé quan coneixem les masses i les velocitats inicials, per trobar la velocitat final del sistema.

NOTA: recordeu que no s'han d'aprendre totes les equacions a resoldre per exemple en les col·lisions, sinó només aquelles bàsiques: les defincions de treball, energia cinètica, energia potencial, la conservació de l'energia mecànica, el teorema de les forces vives, les definicions d'impuls, de quantitat de moviment, la conservació de la quantitat de moviment, i la conservació de l'energia cinètica en una col·lisió elàstica. Això són les coses importants que cal recordar. Les equacions concretes a resoldre en un cas concret de col·lisions, per exemple, es dedueixen d'aquests principis generals.