Solucions de Problemes de Dinàmica

Sant Ignasi-Sarrià
Departament de Ciències de la Naturalesa i Tecnologia.

En aquests fulls posem les solucions d'una sèrie de problemes que em semblen interessants. Les solucions que proposo aquí estan evidentment subjectes a errors humans; a veure quants en trobeu! Espero, de totes maneres, que ajudin...

Problema 1) Tirem d'un objecte amb una corda. L'objecte llisca sobre una superfície horitzontal, i la corda amb què tirem forma un angle de 37° amb aquesta superfície.

a) Dibuixa un esquema en què figurin totes les forces que actuen sobre l'objecte.

b) Quina és la força efectiva que mou l'objecte? Suposa que no hi ha fricció.

c) Si l'objecte té una massa m, amb quina velocitat es mourà quan quan hagi recorregut una distància s, si mantenim constant la força amb què tirem?

d) Resol de nou el problema si considerem ara que la fricció de l'objecte amb terra és constant i val μ.

Solució:

b) $F_{\text{resultant}} = F \cdot \cos 37^o$.

c) Aquest problema és més aviat de cinemàtica. Veiem com el podem resoldre. Farem els següents passos:

- Primer: trobarem l'acceleració, ja que coneixem la massa i la força que actua sobre aquesta.

- Segon: Recordem l'expressió que ens dóna x en funció del temps per un MRUA ($x = x_0 + v_{o,x} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$). En aquest problema coneixem la distància recorreguda (s) i l'acceleració que té, i sabem que parteix del repòs. Per tant, podrem trobar fàcilment el temps que tarda a recórrer la distància s.

- Tercer: trobarem la velocitat que assoleix la massa m en aquest emps, recordant l'expressió de v en funció del temps per un MRUA ($v = v_o + a \cdot t$).

És fàcil, no? Mirem ara com fer-ho, pas a pas...

Primer pas: a partir de

$$F \cdot \cos 37^o = ma$$

trobem que

$$a = \frac{F \cdot \cos 37^o}{m}. \tag{1}$$

Segon pas: en el nostre cas, l'expressió per x en funció del temps passa a ser:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

D'aquí obtenim que:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot m}{F \cdot \cos 37^o}} \tag{2}$$

Tercer pas: a partir de l'expressió de la velocitat per un MRUA: $v_f = a \cdot t$ obtenim, després d'algunes operacions, i tot considerant els resultats (1) i (2):

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot (F \cdot \cos 37^o)}{m}}$$

d) El procediment és similar, només que ara amb la força de fregament. La força de fregament serà $F_f = \mu \cdot N$, on la normal la pots trobar a partir de la 2a llei de Newton. Només cal tenir en compte que verticalment actuen, a més de la normal i el pes, el component vertical de la força, que té un angle de 37°. Serà, per tant, $N = mg - F \cdot \sin 37^o$. Trobant la nova acceleració i seguint després passos similars als de l'apartat anterior, t'ha de resultar:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot s[F \cdot (\cos 37^o + \mu \cdot \sin 37^o) - \mu \cdot m \cdot g]}{m}}$$

Problema 2) *Calcula l'acceleració amb què es mou el conjunt de la figura 1 quan el sistema es mou, si se suposa:*

a) que no hi ha fricció

b) que hi ha fricció entre el pla inclinat i la massa m.

Solució. Per fer aquest problema es tracta simplement de fer servir el procediment habitual. Per això cal fer un bon dibuix dels cossos que hi ha i de les forces. Veure la figura 1.

Llavors utilitzarem la 2a llei de Newton, $\sum F = m \cdot a$, per cada una de les dues masses que hi ha.

Així, per la massa M tindrem:

$$M \cdot g - T = M \cdot a,$$

on suposem que l'acceleració tindrà direcció cap avall.

Pel cos m tindrem:

$$T - m \cdot g \cdot \sin\alpha = ma,$$

on considerem positiva la direcció que va en el sentit cap a la dreta per la massa m i cap avall per la massa M (aquesta és la direcció que hem suposat que pot tenir l'acceleració de m i M i que prendrem com a positiva).

Per eliminar la tensió T i aïllar a sumem les dues equacions anteriors:

$$M \cdot g - m \cdot g \cdot \sin\alpha = (M + m) \cdot a$$

d'on resulta que

$$a = \frac{M - m \cdot \sin\alpha}{(m + M)} \cdot g$$

Observeu que si resulta un valor de a negatiu, indicaria que el cos es mou en sentit contrari al que hem suposat (la massa M pujaria en lloc de baixar). Això passarà en el cas que $M < m \cdot \sin\alpha$.

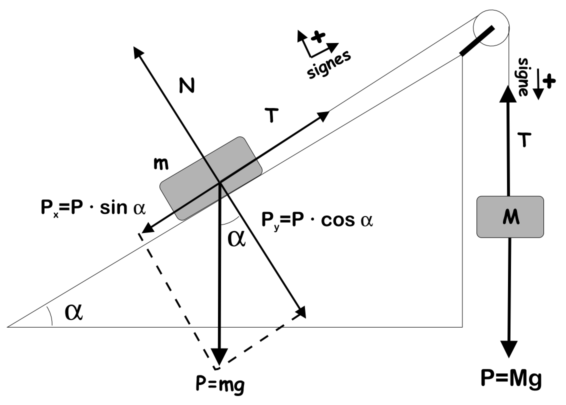


Figura 1:

b) Si hi ha fregament tindrem, aplicant Newton al cos M:

$$M \cdot g - T = M \cdot a \qquad (3)$$

i pel cos m:

$$T - m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_f = m \cdot a$$

que, posant el valor de $F_f = \mu \cdot N = \mu m g \cos\alpha$, dóna:

$$T - m \cdot g \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) = m \cdot a \qquad (4)$$

Si sumem de nou les dues equacions (3) i (4), eliminem la tensió i obtenim el valor de l'acceleració:

$$M \cdot g - m \cdot g \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) = (M + m) \cdot a$$

d'on resulta:

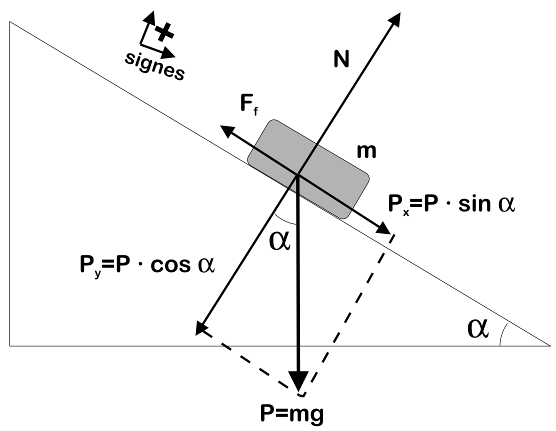
$$a = \frac{M - m \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{M + m} \cdot g$$

Si sortís un valor de a negatiu, indicaria que el moviment no és tal i com l'hem suposat en aquests càlculs, sinó en sentit contrari, o també podria significar que en realitat les masses estan en repòs. Ull! Si sortís l'acceleració negativa, hauríem de *refer els càlculs* prenent una força de fregament en sentit contrari al que hem suposat (*pensa per què!!*[1]

Problema 3) *Amb quina acceleració es mou un objecte deixat en repòs sobre un pla inclinat que forma un angle de 10º amb l'horitzontal si el coeficient de fricció entre el pla i l'objecte és de 0,5?*

Solució. Aquest problema ens fa veure la importància d'anar amb compte amb el fregament. Femho i ho veurem.

[1] És clar, hem pres el fregament com una força que en aquest cas va cap a l'esquerra, perquè hem suposat que s'oposa a un moviment de m cap a la dreta. Si resulta que surt a negatiu, pot voler dir dues coses. O bé que en realitat la tendència de m és anar cap a l'esquerra, o bé que la força de fregament és en realitat més petita que la que hem suposat, que és $F_f = F_{f,\max} = \mu \cdot N$.
El que cal en aquests dos casos és refer els càlculs tot prenent el fregament en sentit contrari a l'inicialment pres, és a dir, en el nostre cal suposar F_f ara cap a la dreta ($\longrightarrow$). Si en el nou cas surt una acceleració negativa, vol dir que en realitat m va cap a l'esquerra. Si surt ara l'acceleració positiva (cap a la dreta: $\longrightarrow$), ens indica que estem prenent de nou una força de fricció massa gran. Això vol dir que en realitat la massa està *en repòs*, i que la força de fricció real és més petita que $F_{f,\max} = \mu \cdot N$. Pensa-ho una mica, tot plegat! És més difícil d'explicar que d'endendre!



Seguim el procediment 'de sempre' (dibuix-diagrama puntual, llei de Newton per cada massa i eix, resoldre les equacions).

A partir del dibuix indicat, mirem els dos components (perpendicular al pla i paral·lel al pla) en que podem descomposar el moviment. Tindrem, a partir de les equacions de Newton corresponents a cada eix:

Component Y: $P \cdot \cos\alpha = N$

Component X:

$$\begin{aligned} & P \cdot \sin\alpha - F_f = \\ = \; & m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu_c \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = \\ = \; & m \cdot a \end{aligned}$$

I ara resolem el sistema d'equacions. De la segona podem aïllar l'acceleració, tot utilitzant la informació que em dóna la primera equació:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu_c \cdot \cos\alpha)}{m} = \\ &= g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = -3,13 \mathrm{m/s}^2. \end{aligned}$$

Veiem com aquest resultat (tenir a negativa) és absurd: resultaria que el cos accelera cap amunt i ascendeix pel pla inclinat de manera espontània!!

Com això no és físicament raonable, hem de concloure que amb les condicions del problema (inclinació del pla i coeficient de fregament donats), *el cos no es mou.*

El resultat absurd provenia d'haver utilitzat un fregament més gran del que realment està exercint el pla sobre el cos. Recordar que $F_{\mathrm{fr}} = \mu_c \cdot N$ és en realitat el *fregament quan el cos s'està movent.* Si utilitzem l'expressió $F_{\mathrm{fr}} = \mu_e \cdot N$, el que trobem és el *fregament màxim* que pot exercir el pla sobre el cos quan aquest està en repòs. En el nostre cas, el resultat absurd prové de que hem utilitzat $F_{\mathrm{fr}} = \mu_c \cdot N$ quan, per la situació del problema, cal una força de fregament més petita per tenir la massa en repòs.

Ara ens podem preguntar com trobar la força de fregament que actua en realitat. El que s'ha de fer és utilitzar la condicio d'equilibri ($\Sigma F = 0$) pel component X del moviment, ja que sabem que el cos estarà en repòs. Tindrem:

$$P \cdot \sin\alpha - F_{\mathrm{fr}} = 0,$$

d'on resulta que

$$F_{\mathrm{fr}} = P \cdot \sin\alpha.$$

Si ens pregunten quin és el màxim angle que pot tenir el pla inclinat perquè, amb el coeficient de fregament μ_e donat, el cos estigui en repòs, n'hi ha prou amb igualar la força de fregament que hem trobat, amb el valor màxim que pot assolir:

$$F_{\mathrm{fr}} = P \cdot \sin\alpha = F_{\mathrm{fr\ max}} = \mu_c \cdot N$$

Com que

$$N = P \cdot \cos\alpha$$

(com hem trobat més amunt), tindrem que

$$P \cdot \sin\alpha = \mu_c \cdot P \cdot \cos\alpha,$$

d'on trobarem que l'angle que cal tenir perquè es tingui aquesta igualdat serà:

$$\tan\alpha = \mu_c,$$

com podeu verificar fàcilment (només cal fer una petita transformació en la darrera equació!!). D'aquí resulta que l'angle màxim que pot tenir el pla sense que el cos rellisqui serà:

$$\alpha = \arctan\mu.$$

En el cas del problema que estem tractant, observem que resulta un angle:

$$\alpha = \arctan 0,5 = 26,57^{\mathrm{o}}.$$

Veiem que és un resultat raonable. En efecte, veiem que aquest angle és més gran que els 10^{o} que deia l'enunciat que té el pla que hem estudiat. Per tant, confirmem que el resultat absurd que ens ha sortit al principi ens indicava que el cos estava en repòs.

Problema 4) *Un cos de 5 kg, alliberat sobre un pla inclinat 37º, llisca amb una acceleració igual a 0,2 m·s^{-2}.*

a) Calcula la força paral·lela al pla que hem de fer perquè llisqui amb moviment uniforme.

b) Si aquesta força s'aplica horitzontalment, serà més gran o més petita que en el cas anterior? Quant valdrà en aquest cas?

Solució. En aquest problema cal, primer de tot, trobar el coeficient de fricció. Per això utilitzem el fet que sabem que, quan està alliberat, cau amb una acceleració $a = 0,2\ m/s^2$.

Les forces que actuen quan el cos cau lliurement pel pla són: el pes (que el fa caure) i el fregament (que s'oposa al moviment). Tindrem llavors, segons Newton aplicat a aquest cas (veure la figura del problema anterior):

$$P \cdot \sin\alpha - F_f = m \cdot a$$

d'on resulta que

$$P \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a.$$

Aquesta expressió ens permet calcular el coeficient de fricció, ja que en ella ho coneixem tot menys μ:

$$\mu = \frac{g \cdot \sin\alpha - a}{g \cdot \cos\alpha} = \frac{9,8 \cdot \sin 37^{\circ} - 0,2}{9,8 \cdot \cos 37^{\circ}} = 0,73.$$

a) Ara que coneixem el coeficient de fricció, ens plantegem com aconseguir que l'objecte descendeixi el pendent amb velocitat constant. Perquè això passi, introduirem una força constant de frenada perquè s'anul·li l'acceleració. Aquesta força està aplicada en la direcció de la superfície inclinada. En aquest cas tindrem, aplicant Newton amb la nova força inclosa:

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - F_{\text{frenada}} = m \cdot a = 0, \quad (5)$$

d'on resulta:

$$\begin{aligned} F_{\text{frenada}} &= m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = \\ &= m \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = \\ &= 5 \cdot 9,8 \cdot (\sin 37^{\circ} - 0,73 \cdot \cos 37^{\circ}) = 1\ N \end{aligned}$$

b) *Segona part del problema, més complicadota i 'interessant'. Per seguir els passos que venen a continuació, recomano que tinguis al davant el dibuix esquemàtic de la situació que estudiem!*

Suposem que per frenar el cos volem aplicar una força en la direcció horitzontal. En aquest cas, el problema serà un xic més complicat, i caldrà replantejar-ho.

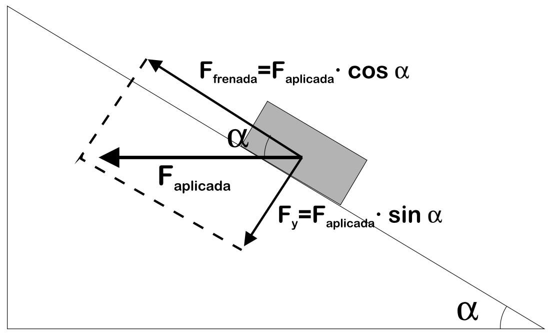


Figura 2: Esquema de la força aplicada horitzontal i dels seus dos components.

Veiem en la figura que la força aplicada té un component paral·lel al pla, que frena el cos, i també un component perpendicular, que afecta al càlcul de la normal N, que necessitem per trobar la fricció.

El component paral·lel al pla és:

$$F_{\text{frenada}} = F_{\text{aplicada}} \cdot \cos\alpha.$$

El component perpendicular al pla fa que ara N sigui [2]:

$$N = mg\cos\alpha + F_{\text{aplicada}} \cdot \sin\alpha.$$

L'equació de Newton corresponent a l'eix paral·lel al pla serà, tot considerant ja el nou valor de N:

$$\begin{aligned} & m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha + F_{\text{aplicada}} \cdot \sin\alpha) \\ - \ & F_{\text{aplicada}} \cdot \cos\alpha = m \cdot a = 0 \end{aligned}$$

D'aquí podrem trobar el valor de F_{aplicada}:

$$F_{\text{aplicada}} = mg \cdot \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}$$

El resultat amb els valors numèrics del problema concret és: F_{aplicada}=0,74 N. Observem que surt un valor una mica més petit que quan aplicàvem la força paral·lela al pla.

[2] Per veure això només cal aplicar la 2a llei de Newton al component Y (perpendicular al pla): $mg\cos\alpha + F_{\text{aplicada}} \cdot \sin\alpha - N = ma_y = 0$.